# ベクトルの外積とその応用

目次

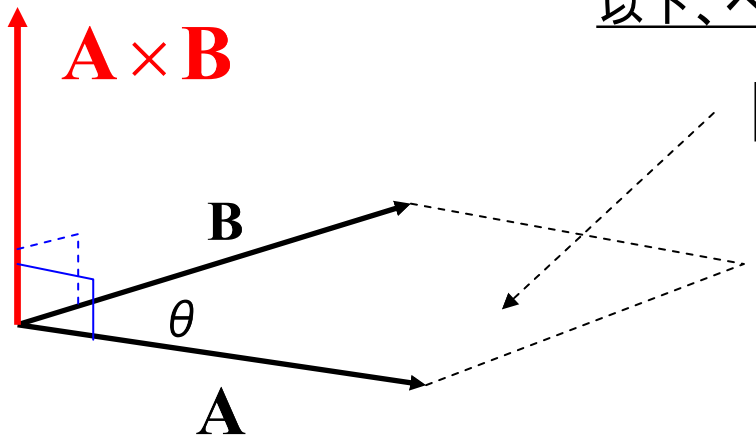


Made by R. Okamoto (Kyushu Institute of Technology)
Filename=gradient-summary090619.ppt

# 1．ベクトル積（外積）の定義

ベクトル積、vector product
外積：external product

２つのベクトルA,Bから積の形でベクトルをつくる(定義する）。




以下、ベクトルは太文字で表されていることに注意

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$$

$$\left|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$$

大きさ：ベクトルAとB により囲まれる平行四辺形の面積

向き：ベクトルAからBの向きに右ねじを回したとき、ねじの進む向き。

元のベクトルA,Bと垂直である。

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\perp\mathbf{A},\ (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\perp\mathbf{B}$$

# 2. ベクトル積の性質

1) 交換則：$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$

$$\rightarrow \mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$$

2) 分配則：$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$

3) スカラー倍 :$(k\mathbf{A})\times\mathbf{B} = k(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(k\mathbf{B})$ , $k$ :スカラー量

4)$x, y, z$軸向きの単位ベクトル（基本ベクトル、基底ベクトル）

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0,$$

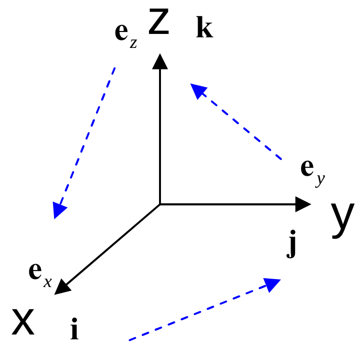
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j},$$

$$\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k},\ \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i},\ \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

$$\mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y\times\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_z = 0,$$

$$\mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z,\quad \mathbf{e}_y\times\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x,\quad \mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{e}_y\times\mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z,\ \mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x,\ \mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y.$$




輪環の順（cyclic order)

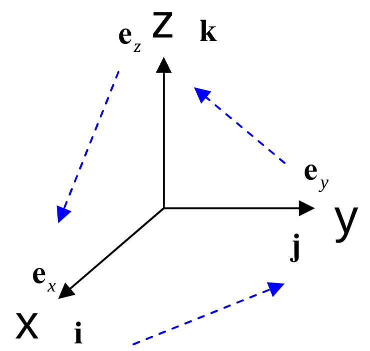
# 3. ベクトル積の解析的表現

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_x\mathbf{e}_x+A_y\mathbf{e}_y+A_z\mathbf{e}_z)\times(B_x\mathbf{e}_x+B_y\mathbf{e}_y+B_z\mathbf{e}_z)$$

$$=\mathbf{e}_x(A_yB_z-A_zB_y)+\mathbf{e}_y(A_zB_x-A_xB_z)+\mathbf{e}_z(A_xB_y-A_yB_x)$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$\rightarrow\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$




輪環の順(cyclic order)

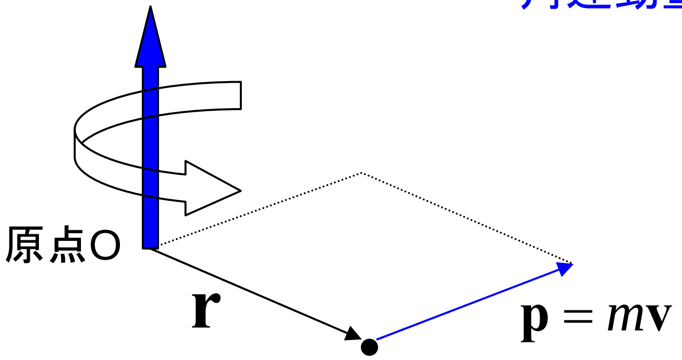
# 4. ベクトルの外積の物理応用例

## 3次元系における粒子の角運動量ベクトル

$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$ 角運動量ベクトル

位置ベクトル $\mathbf{r}$

運動量ベクトル $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

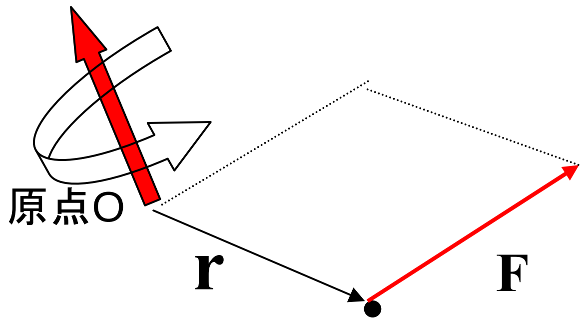



X,y,z成分

$$L_x = y \cdot mv_z - z \cdot mv_y,$$
$$L_y = z \cdot mv_x - x \cdot mv_z,$$
$$L_z = x \cdot mv_y - y \cdot mv_x.$$

## 3次元系におけるトルク(または力のモーメント)

$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 力のモーメント(トルク) Torque,moment of a force, torque



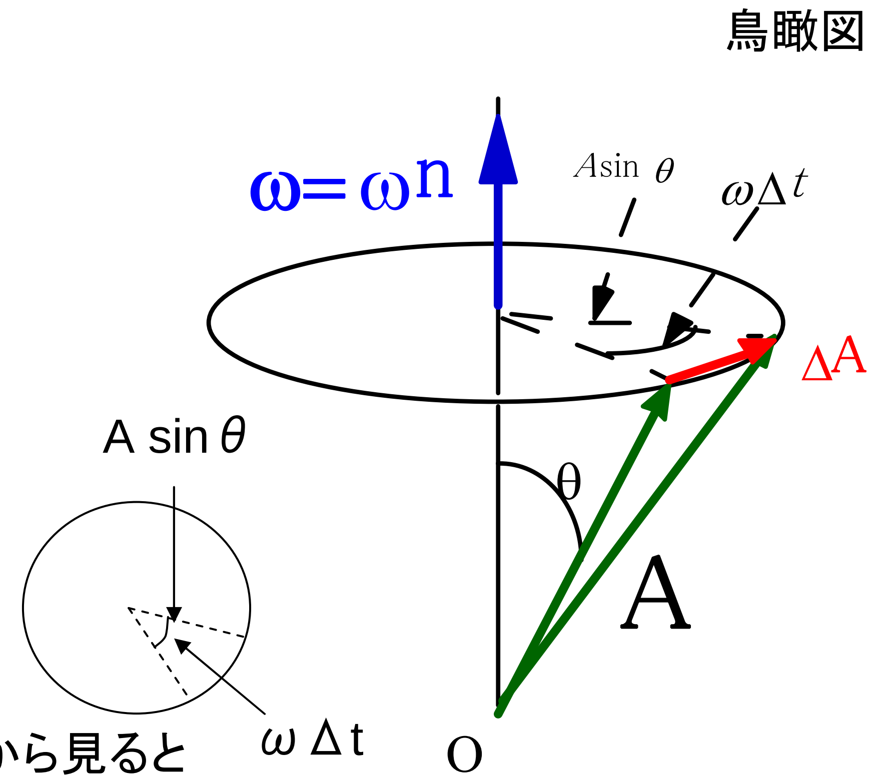

X,y,z成分

$$N_x = y \cdot F_z - z \cdot F_y,$$
$$N_y = z \cdot F_x - x \cdot F_z,$$
$$N_z = x \cdot F_y - y \cdot F_x.$$

## 回転によるベクトルの時間的変化

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \equiv \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathrm{rot}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}}$$




座標軸に回転による慣性力、剛体の回転についてのオイラー方程式の導出などに応用される。

電荷*q*の粒子が磁束密度***B***の下で、速度***v***で運動すると、ローレンツ力が働く。

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

# 5. ベクトルの三重積

## 5.1 3つのベクトルによるスカラー三重積

$$\mathbf{A} \equiv (A_x, A_y, A_z), B \equiv (B_x, B_y, B_z), \mathbf{C} \equiv (C_x, C_y, C_z)$$

$$\to \mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \equiv A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x)$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\to \mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \bullet (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

ベクトル,A,B,Cをそれぞれ一辺とする平行六面体の体積に等しい

## 5.2 3つのベクトルによるベクトル三重積

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})\mathbf{C}$$

電磁気学、特にマックスウェル方程式から電磁波の方程式を導きときなどに応用される。

# もっと知るための参考書

和達三樹「物理のための数学」、岩波書店、1983年。
香取眞理、中野　徹「物理数学の基礎」、サイエンス社、2001年。