ある変数 s の、2 階微分可能な関数 $f(s), g(s)$ を考える。波動方程式（1 次元）$\partial^2\psi/\partial x^2 = (1/v^2)\partial^2\psi/\partial t^2$ の解と、位置座標 x, 時刻 t の組み合わせからなる変数 $(x-vt), (x+vt)$ の関数、$f(x-vt), g(x+vt)$ は、それぞれ x 軸の正の向きと負の向きに速さ v で進む波動を表すことを次の手順で確かめよ。ただし、v は位置座標 x, 時刻 t に依存しない、正の定数である。

1. 時刻 $t+\Delta t$, 位置座標 $x+v\Delta t$ における関数 f の値と、時刻 t, 位置座標 x における関数 f の値の関係を調べて、その意味を述べよ。
2. 時刻 $t+\Delta t$, 位置座標 $x-v\Delta t$ における関数 g の値と、時刻 t, 位置座標 x における関数 g の値の関係を調べて、その意味を述べよ。

(解答例)

1. 題意より、$\psi(x,t) \equiv f(x-vt)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \psi(x+v\Delta t, t+\Delta t) &= f(x+v\Delta t - v[t+\Delta t]) = f(x-vt) \\ &= \psi(x,t) \qquad (1) \end{aligned}$$

となる。すなわち、時刻 $t+\Delta t$, 位置座標 $x+v\Delta t$ における関数 f の値と、時刻 t, 位置座標 x における関数 f の値が等しい。この事実は、ある時刻の波形を x に沿って、$v\Delta t$ だけ x 軸の正の向きに平行移動したものが、時刻 $t+\Delta t$ における波形であることを示す。したがって、$\underline{\psi(x,t) = f(x-vt)}$ で表される波形は速さ v で x 軸の正の向きに動く。

2. 題意より、$\psi(x,t) \equiv g(x+vt)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \psi(x-v\Delta t, t+\Delta t) &= g(x-v\Delta t + v[t+\Delta t]) = g(x+vt) \\ &= \psi(x,t) \qquad (2) \end{aligned}$$

となる。すなわち、時刻 $t+\Delta t$, 位置座標 $x-v\Delta t$ における関数 g の値と、時刻 t, 位置座標 x における関数 g の値が等しい。この事実は、ある時刻の波形を x に沿って、$v\Delta t$ だけ x 軸の負の向きに平行移動したものが、時刻 $t+\Delta t$ における波形であることを示す。したがって、$\underline{\psi(x,t) = g(x+vt)}$ で表される波形は速さ v で x 軸の負の向きに動く。