例題（波動方程式の解）wave-eq1a-qa81201.tex

位置 x, 時刻 t の関数 $\psi(x,t) = A\cos k(x-vt)$ が次の微分方程式（１次元波動方程式）を満たすことを以下のような手順で確認せよ。ただし、A, k, v は x, t によらない定数である。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1}$$

1. 偏微分係数 $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ を計算せよ。
2. 偏微分係数 $\frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ を計算せよ。
3. $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ を計算せよ。

(解答例)

関数 $\psi(x,t) = A\cos k(x-vt)$ は、位置 x, 時刻 t の関数である $k(x-vt)$ の合成関数とみなせるから、まず、$k(x-vt) \equiv s$ とおいて、偏微分係数 $\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial t}$ を求める。

$$\frac{\partial s}{\partial x} = k,\ \frac{\partial s}{\partial t} = -kv. \tag{2}$$

1. 合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= A\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial\cos s}{\partial s} = -Ak\sin s \\
&= -Ak\sin k(x-vt), \qquad (3)\\
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial\psi}{\partial x}) \\
&= -Ak^2\cos k(x-vt). \qquad (4)
\end{aligned}$$

2. 同様にして

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial t} &= A\frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial\cos s}{\partial s} = Akv\sin s \\
&= Akv\sin k(x-vt), \qquad (5)\\
\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial\psi}{\partial t}) \\
&= -Ak^2v^2\cos k(x-vt). \qquad (6)
\end{aligned}$$

3. 前問までの結果を用いると

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{7}$$

となる。すなわち、関数 $\psi(x,t) = A\cos k(x-vt)$ は波動方程式を満たす。