波動の合成・干渉ー位相子による計算法ー

（目次）

R. Okamoto, Kyushu Inst. Of Technology

1. 純虚数の指数関数に対するオイラーの公式

実数θに対して

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \quad i \equiv \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$$

$$\theta = 0 \quad \rightarrow e^{i0} = 1$$

$$\theta = \pi/2 \rightarrow e^{i\pi/2} = i$$

$$\theta = \pi \quad \rightarrow e^{i\pi} = -1$$

オイラーの公式の両辺を2乗して、実数部、虚数部を比較すると、
三角関数の2倍角の公式が得られる！

２. 波動関数の複素数表現

正弦波と同様に、余弦関数を用いることができる。そして、進行する正弦波と余弦波をまとめて、複素数であらわすことができる！

$$\Psi(x,t) \equiv A\mathrm{e}^{i(kx-\omega t+\phi)}$$

$$\equiv A\exp[i(kx-\omega t+\phi)]$$

$$= A[\cos(kx-\omega t+\phi)+i\sin(kx-\omega t+\phi)]$$

$$\to \mathrm{Re}\,\Psi(x,t) = A\cos(kx-\omega t+\phi),$$

$$\mathrm{Im}\,\Psi(x,t) = A\sin(kx-\omega t+\phi).$$

後退する波も同様に

$$\Psi(x,t) \equiv A\mathrm{e}^{i(kx+\omega t+\phi)}$$

$$\equiv A\exp[i(kx+\omega t+\phi)]$$

$$= A[\cos(kx+\omega t+\phi)+i\sin(kx+\omega t+\phi)]$$

$$\to \mathrm{Re}\,\Psi(x,t) = A\cos(kx+\omega t+\phi),$$

$$\mathrm{Im}\,\Psi(x,t) = A\sin(kx+\omega t+\phi).$$

波動を表すのに、複素数を用いることが便利な理由

波動を表すのに、複素数を用いることが便利な理由は、波動方程式が線形であるためである。つまり、波動方程式を満たすある複素数の解があれば、その関数の実数部と虚数部はやはり波動方程式の解である。

そして一般に、複素数の形で解を求める方が楽なのである！

注意：線形の演算に限り、複素数をそのまま用いてもよいが、波動のエネルギーなどを計算する場合には、複素数表示をした変位を単純に2乗するのではなく、絶対値の2乗、または複素数表示をした変位とその共役複素数をとる必要がある。

3.X軸の正の向きに進む平面波の合成･干渉

波数kや角振動数ωが同じ2つの平面波の合成･干渉

$$\psi_1(x,t) \equiv A_1 e^{i(kx-\omega t+\phi_1)},\ \psi_2(x,t) \equiv A_2 e^{i(kx-\omega t+\phi_2)}$$

$$\to \Psi(x,t) \equiv \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$$

$$= \left[A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} \right] e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\equiv A e^{i\phi} \cdot e^{i(kx-\omega t)}$$

オイラーの公式を用いて、両辺の実数部と虚数部をそれぞれ比較したりして、

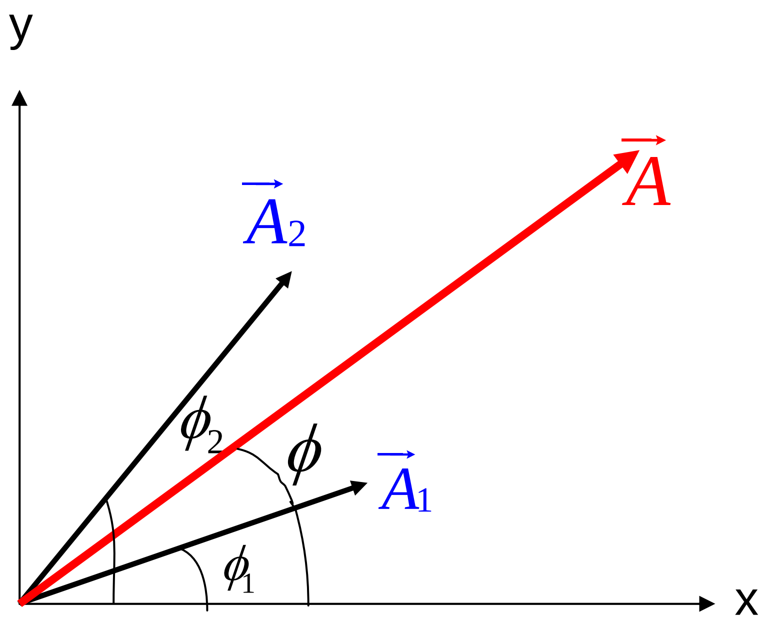
$$\tan\phi = \frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2},$$

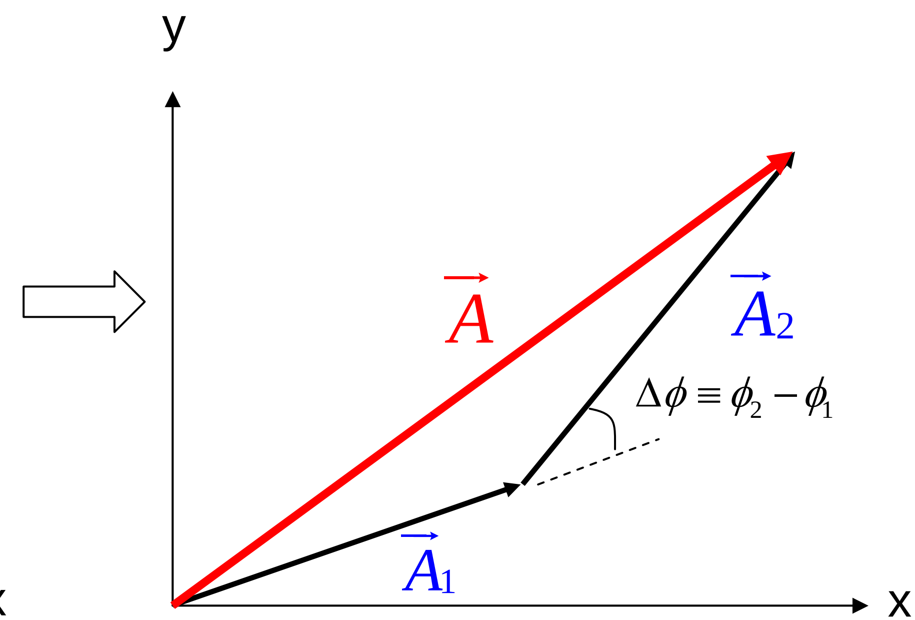
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

$$\to \left| A_1 - A_2 \right| \le A \le A_1 + A_2$$

合成振幅Aの大きさは，合成される2つの波の初期位相の差、位相差で決まる！

4. 位相子または位相ベクトルによる，波の合成の図解





位相子または位相ベクトル

$$\vec{A}_1 \equiv (A_1 \cos\phi_1, A_1 \sin\phi_1),\ \vec{A}_2 \equiv (A_2 \cos\phi_2, A_2 \sin\phi_2),$$

$$\vec{A} \equiv (A_x, A_y) = (A\cos\phi, A\sin\phi)$$

$$\rightarrow \tan\phi = \frac{A_y}{A_x},$$

位相差Δ ϕ　　経路差Δx

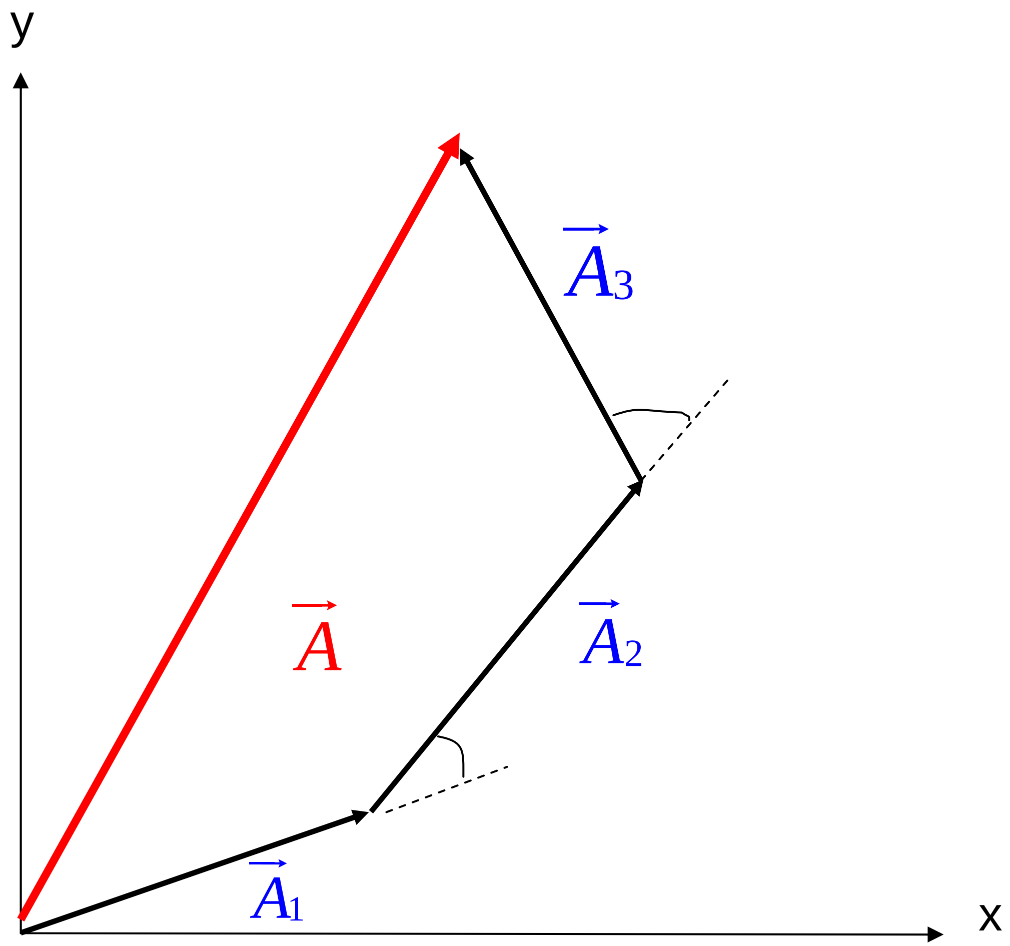
$$\Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1 \qquad \Delta x \equiv x_2 - x_1$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = k\Delta x \qquad \leftarrow \text{位相}=kx-\omega t$$

$$(\text{位相差}) = \frac{2\pi}{\text{波長}}(\text{経路差})=(\text{波数})\times(\text{経路差})$$

$$\rightleftarrows \Delta x = \frac{\lambda}{2\pi}\Delta\phi = \frac{1}{k}\Delta\phi$$

3つ以上の波の合成も同様にできる！



参考文献等

吉原邦夫「物理光学」、共立出版社、1978年。

D.ハリディ/R.レスニック/J.ウォーカー
「物理学の基礎［2］波・熱」（培風館）

J.　オグボーン、M. ホワイト
「アドバンシング物理ー新しい物理入門ー」
シュプリンガー・フェアラーク東京。2004年。
イギリスの高校物理の教科書（日本の物理Iに対応するかも）。

R. P. ファインマン「光と物質のふしぎな理論」、岩波書店。
2003年。